Leçon 266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

Appel

Gozet - Kurtzmann

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

I. Les notions d'indépendance

1. Indépendance d'évènements [App]

Définition 1.1 Deux évènements $A, B \in \mathcal{A}$ sont dits indépendants (sous $\mathbb{P}$) si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Remarque 1.2 L'indépendance de deux évènements est une propriété numérique, il ne s'agit que de comparer deux valeurs.

Exemples 1.3

On lance deux dés équilibrés.

On considère A : « un des dés marque 1 » et B : « la somme des dés vaut 7 », alors A et B ne sont pas indépendants.

On suppose que l'un des dés est rouge, l'autre noir. On note A' : « le dé rouge marque 6 ». Alors A' et B sont indépendants.

Proposition 1.4 Soient A et B deux évènements.

- si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors $A \perp\!\!\!\perp B$ si et seulement si $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
- si $A \perp\!\!\!\perp B$ alors $A^c \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp B^c$ et $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$
- si A est négligeable ou presque certain, $A \perp\!\!\!\perp B$

Définition 1.5 Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements est dite mutuellement indépendante si pour toute partie finie $J \subset I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$.

Proposition 1.6 Une famille d'évènements mutuellement indépendants est une famille d'évènements deux à deux indépendants.

Contre-exemple 1.7

A : « la somme des deux dés est paire » B : « premier dé pair » C : « deuxième dé pair »

Alors les évènements sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement.

Application 1.8 Soit $(p_k)_k$ la suite des nombres premiers ordonnée. Alors pour tout $s > 1$, $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - p_k^{-s})^{-1}$.

Conséquence 1.9 La série des inverses des nombres premiers diverge.

développement 1

2. Indépendance de tribus et de v.a. [App]

Définition 1.10 Deux tribus $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sont dites indépendantes si pour tous $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$, ces évènements sont indépendantes.

Définition 1.11 Deux v.a. X et Y sont dites indépendantes si $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ le sont, ce qui signifie : pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

Remarque 1.12 L'indépendance de v.a. X et Y s'écrit $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.

Théorème 1.13 Soient X, Y des v.a. indépendantes et f, g des fonctions mesurables. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Théorème 1.14 Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. Celles-ci sont indépendantes si et seulement si elles vérifient une des conditions :

- $\mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$
- $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$ pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- $f_{\mathbb{X}} = f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ lorsque les X_i admettent une densité f_i

II. Indépendance et opérations

1. Produit [App] [GK]

Théorème 2.1 Deux v.a. X, Y sont indépendantes si et seulement si pour toutes fonctions f, g boréliennes et positives, $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[f(Y)]$.

Corollaire 2.2 Soient X, Y des v.a.r indépendantes alors $XY \in L^1$ si et seulement si $X \in L^1$ et $Y \in L^1$. Le cas échéant, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Corollaire 2.3 Si X, Y sont des v.a.r. intégrables et indépendantes, alors le couple (X,Y) admet une covariance et $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Contre-exemple 2.4
Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et ε de loi de Rademacher
Alors $\mathbb{E}[X.\varepsilon X] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[\varepsilon X]$ mais $X \not\perp\!\!\!\perp \varepsilon X$

Proposition 2.5 Soient X, Y v.a.r de carrés intégrables et indépendantes. Alors
$\mathrm{Var}\, X + Y = \mathrm{Var}\, X + \mathrm{Var}\, Y$.

2. Somme [App] [GK]

Théorème 2.6 Soient X, Y des v.a.r. indépendantes alors :

- $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$ • $F_{X+Y} = F_X * F_Y$
- si X, Y sont à densités alors $X+Y$ aussi et $f_{X+Y} = f_X * f_Y$
- $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$

Application 2.7 Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Application 2.8 Soient $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Application 2.9 Soient $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ alors si $X \perp\!\!\!\perp Y$, on obtient que
$X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

3. Vecteurs gaussiens [App]

Définition 2.10 Soit $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Alors on dit que $\mathbb{X}$ est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes suit une loi normale sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.11 Un vecteur aléatoire $\mathbb{X}$ de $\mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien si et seulement si sa fonction caractéristique est de la forme $\phi_{\mathbb{X}} : u \longmapsto e^{i\langle m,u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Cu\rangle}$ où $m \in \mathbb{R}^d$, $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$.
Le cas échéant, $\mathbb{E}[\mathbb{X}] = m$ et $K_{\mathbb{X}} = C$. On note $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(m, C)$.

Théorème 2.12 Soit $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$. Alors les variables $X_1, \dots, X_d$ sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Ce qui revient à dire que $K_{\mathbb{X}}$ est diagonale.

III. L'indépendance et les différentes convergences

1. Lemme de Borel-Cantelli [GK]

Lemme 3.1 Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements.
(i) Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$, i.e. presque sûrement seul un nombre fini de A_n se réalisent
(ii) Si $(A_n)_n$ est une suite d'évènements indépendante et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est divergente alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$, i.e. presque sûrement A_n est réalisé pour une infinité de n.

Corollaire 3.2 Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. telle que pour tout $\varepsilon > 0$, la série de terme général $(\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon))_n$ converge. Alors $(X_n)_n$ converge p.s. vers X.

Corollaire 3.3 Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. convergeant en proba vers X. Alors, il existe une sous-suite $(X_{n_k})_k$ qui converge p.s. vers X.

2. Théorèmes limite [App]

Théorème 3.4 (loi forte des grands nombres) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. i.i.d. de L^1 avec $m := \mathbb{E}[X_1]$. Alors : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s.} m$

Remarque 3.5 C'est tout l'intérêt de la construction d'estimateurs par la méthode des moments, les estimateurs obtenus sont fortement consistants.

Théorème 3.6 (théorème central limite) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. i.i.d admettant une variance $\sigma^2 > 0$. Notons m leur espérance. Alors : $\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

Application 3.7 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue bornée. Alors, on a la convergence $\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-x^2/2}\, dx$.

développement 8